ANALISI II → funzioni in più variabili

Analisi 1: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f: A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$

Analisi 2: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$f: \Omega \to \mathbb{R}$ $(\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ oppure $\subseteq \mathbb{R}^3)$

↖ n variabili in partenza

STRUTTURA EUCLIDEA su $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale

↳ insieme delle n-uple di numeri reali

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$x \in \mathbb{R}^n \quad \underline{x} = (x_1 \dots x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j \underline{e}_j$

↑ vettore ↑ componenti

$\mathbb{R}^n = \{x_1 \dots x_n \mid x_j \in \mathbb{R} \text{ con } j = 1 \dots n\}$

$\underline{e}_1 \dots \underline{e}_n$ → versori canonici: $e_j = (0, \dots 1, 0)$ ↖ posizione j-esima

$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

FORME BILINEARI

$f: (\underline{x}, \underline{y}) \to \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$\underline{x}^t \cdot A \cdot \underline{y} = f(\underline{x}, \underline{y})$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Proprietà

① SIMMETRIA: $\iff A = A^t$

② POSITIVITÀ: $\underline{x}^t \cdot A \cdot \underline{x} = 0 \iff \underline{x}$ = vettore nullo $(\underline{0})$

$\underline{x}^t \cdot A \cdot \underline{x} \geq 0$

Forma quadratica

def: l'espressione $\underline{x}^t \cdot A \cdot \underline{x}$ si dice forma quadratica.

PRODOTTO SCALARE

def: si dice prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$ una qualunque forma bilineare, simmetrica e definita positiva.

dato un prodotto scalare $\langle , \rangle$ su $\mathbb{R}^n$ si dice **NORMA** del vettore $\underline{x} \in \mathbb{R}$ =

$$\sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle} = \underline{x}^t \cdot A \cdot \underline{x} = \|x\|$$

ex. si dice **prodotto scalare canonico** quello associato alla matrice identità =

$$I_n = \sigma_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x} \cdot I_n \cdot \underline{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

oss: il p. scalare canonico è anche euclideo.

$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ (prodotto scalare)

$|x| = \|x\| = \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$ (norma di x)

$dist(x,y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$ (distanza tra x e y)

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Proprietà

① $\|\lambda \underline{x}\| = |\lambda| \cdot \|\underline{x}\|$

② $\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$ **disuguaglianza triangolare**

③ $|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| \leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|$ **disuguaglianza di Cauchy - Swartz**

dim ③

$$\|\underline{x} + \lambda \underline{y}\|^2 = \langle \underline{x} + \lambda \underline{y}, x + \lambda y \rangle =$$

$$= \langle x, x + \lambda y \rangle + \lambda \langle y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + \lambda \langle x, y \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle =$$

(i due termini centrali sono uguali)

$$= \|x\|^2 + 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \|y\| =$$

$$\Rightarrow 2\lambda \langle x, y \rangle = \|x + \lambda y\|^2 - \|x\|^2 - \lambda^2 \|y\| =$$

pongo $\lambda = \frac{-\|x\|}{\|y\|}$ con $y \neq 0$

$$\Rightarrow -2 \frac{\|x\|}{\|y\|} \cdot \langle x, y \rangle = \left\| x - \frac{\|x\|}{\|y\|} \cdot y \right\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2 =$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \cdot 2 \frac{\|x\|}{\|y\|} = 2\|x\|^2 - \left\| x - \frac{\|x\|}{\|y\|} \right\|^2$$

$$\Rightarrow 2 \frac{\|x\|}{\|y\|} \langle x, y \rangle \leq 2\|x\|^2$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle \leq \frac{\|x\|^2 \cdot \|y\|}{\|x\|} \Rightarrow \langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \blacksquare$$

dim ②

$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle$;

$\langle x,x \rangle + 2\langle x,y \rangle + \langle y,y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x,y \rangle + \|y\|^2$;

$\|x\|^2 + 2\langle x,y \rangle + \|y\|^2 \leq \underbrace{\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\|}_{(\|x+y\|)^2}$

$\Rightarrow \|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$ ∎

def. una distanza in $\mathbb{R}^n$ è un funzione:

$d : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tale che:

- $d(x,y) = d(y,x)$ simmetria
- $d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ positività
- $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}^n$

def. : DISTANZA EUCLIDEA in $\mathbb{R}^n$:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}$$

Definizione

dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si definisce SFERA o PALLA di centro x_0 e raggio $r > 0$, l'insieme:

$$B(x_0, r) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r \} = \left(\sum_{j=1}^{n} (x_j^0 - x_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < r$$

FUNZIONI

- si dice funzione di una variabile una funzione definita in $A \subseteq \mathbb{R}$;
- si dice funzione di più variabili una funzione definita in $A \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n > 1)$.
- si dice funzione a valori reali una funzione che ha codominio $\mathbb{R}$;
- si dice funzione a valori vettoriali una funzione che ha codominio $\mathbb{R}^m$.

ex:

$f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ funzione vettoriale di una variabile

$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione reale di due variabili

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

FUNZIONI A VALORI VETTORIALI

considero una funzione:

$r : I \to \mathbb{R}^m$

con I intervallo in $\mathbb{R}$; sia $t_0 \in I$ e sia $l \in \mathbb{R}^m$.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

def. si dice che:

$$\lim_{t \to t_0} r(t) = l \quad \text{se:} \quad \lim_{t \to t_0} |r(t) - l| = 0$$

ovvero se la distanza tra $r(t)$ e l, nello spazio $\mathbb{R}^m$, tende a zero per $t \to t_0$.

Prop.

siano $r(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \vdots \\ r_m(t) \end{pmatrix}$ con $r_i : I \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots m$ e sia $l = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$,

allora per $t \to t_0$:

$r(t) \to l \iff r_i \to l_i \quad \forall\, i = 1, 2 \dots m$

ovvero il limite della funzione a valori vettoriali si calcola componente per componente. In simboli:

$$\lim_{t \to t_0} (r_1(t), r_2(t) \dots r_m(t)) = \left(\lim_{t \to t_0} r_1(t), \dots, \lim_{t \to t_0} r_m(t) \right)$$

Prop.

per le funzioni vettoriali, valgono le proprietà dei limiti in una variabile:

- teorema di unicità del limite;
- teorema sul limite della somma o del prodotto per una costante;
- definizione di funzione continua
  ↳ $r : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ è continua in t_0 se $\lim_{t \to t_0} r(t) = r(t_0)$

oss: una funzione a valori vettoriali è continua se e solo se lo sono tutte le sue componenti.

def. sia I un intervallo in $\mathbb{R}$. Si dice **ARCO di CURVA CONTINUA** o cammino in $\mathbb{R}^m$ una funzione $r : I \to \mathbb{R}^m$ continua.

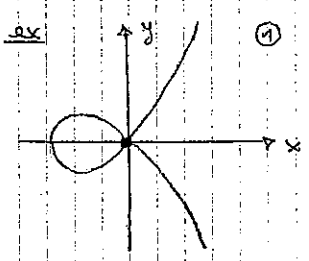
Il **SOSTEGNO** della curva è l'immagine della funzione.

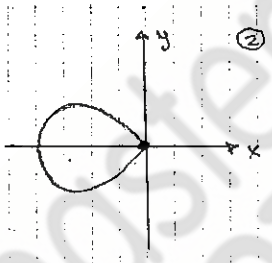
def. una **curva** si dice:

- **CHIUSA** se $r(a) = r(b)$ con $I = [a, b]$.
  ovvero se il punto di partenza e di arrivo coincidono;
- **SEMPLICE** se non ripassa mai dallo stesso punto, cioè se $t_1 \neq t_2 \Rightarrow r(t_1) \neq r(t_2)$, con l'unica eccezione $(t_1, t_2) = (a, b)$, ovvero una curva semplice può essere chiusa ma non deve intrecciarsi;
- **PIANA** se esiste un piano che contiene il suo sostegno.

oss: un arco di curva continua è costituito da una funzione (continua) $r: I \to \mathbb{R}^m$, detta parametrizzazione della curva e un insieme di punti di $\mathbb{R}^m$ (l'immagine di r) detto sostegno della curva.

ex





① curva continua, non chiusa, non semplice

② curva continua, chiusa e semplice.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

DERIVATA di una FUNZIONE VETTORIALE

derivata a una funzione $r: I \to \mathbb{R}^m$

def. sia $r: I \to \mathbb{R}^m$ e $t_0 \in I$, si dice che r è derivabile in t_0 se:

$$r'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{r(t_0+h) - r(t_0)}{h} \quad \text{esiste ed è finito.}$$

se r è derivabile in tutto I e inoltre la funzione è continua in I, allora si dice che r è di classe $C^1(I)$ e si scrive $r \in C^1(I)$. Analogamente si definiscono le derivate di ordine successivo e le funzioni di classe $C^k(I)$.

oss: anche la derivata di una funzione a valori vettoriali si fa componente per componente. Il vettore derivato è il vettore delle derivate delle componenti.

def. sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Si dice **ARCO di CURVA REGOLARE** un arco di curva tale che $\mathbf{r \in C^1(I)}$ e $\mathbf{r'(t) \neq 0}$ per ogni $t \in I$.
ovvero il vettore derivato esiste in ogni punto, varia con continuità e non si annulla mai.

oss: per le curve regolari è ben definito il versore tangente:

$$T = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$$